

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

۱۱۱- محور تقارن سهمی های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض

یکسان روی دو سهمی، خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

-۴ (۲)

-۸ (۱)

$$\begin{cases} y = x^2 + ax - 2 \longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \longrightarrow x = -\frac{a}{2} \\ y = -x^2 - 2x + b \longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \longrightarrow x = -\frac{-2}{-2} = -1 \end{cases} \longrightarrow -\frac{a}{2} = -1 \longrightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow x^2 + 2x - 2 = 1 \longrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \longrightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \longrightarrow A(-3, 1) \\ x = 1 \longrightarrow B(1, 1) \end{cases} \longrightarrow 1 = -9 + 6 + b \longrightarrow \boxed{b = 4} \quad ab = 2(4) = 8$$

۱۱۲- در بازه (a, b) عبارت $15x^2 + 73x + 14$ منفی و عبارت $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right|$ بزرگ تر از سه است. بیشترین مقدار $b-a$

کدام است؟

$\frac{5}{3}$ (۱)

$\frac{67}{15}$ (۴)

$\frac{4}{15}$ (۳)

$\frac{23}{3}$ (۲)

$$15x^2 + \frac{73x}{3} + \frac{14}{3} < 0 \longrightarrow \frac{(15x+70)(15x+3)}{15} < 0 \longrightarrow \frac{\cancel{15}(3x+14) \times \cancel{3}(\Delta x+1)}{\cancel{15}} < 0$$

$$(3x+14)(\Delta x+1) < 0 \longrightarrow -\frac{14}{3} < x < -\frac{1}{\Delta} \quad (I)$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3 \longrightarrow \left| \frac{x-1-2}{2} \right| > 3 \longrightarrow \left| \frac{x-3}{2} \right| > 3 \longrightarrow \frac{|x-3|}{2} > 2 \longrightarrow |x-3| > 6$$

$$\begin{cases} x-3 > 6 \longrightarrow x > 9 \\ x-3 < -6 \longrightarrow x < -3 \end{cases} \quad (II) \xrightarrow{(I) \cap (II)} -\frac{14}{3} < x < -3 \longrightarrow b-a = -3 + \frac{14}{3} = \frac{5}{3}$$

۱۱۳ - تابع $f(x) = mx^2 - nx - k$ در هر بازه ، هم صعودی و هم نزولی است . اگر مجموعه زیر ، تابع باشد ،

مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است ؟ $\{(m, n-1), (0, k), (n-1, m^2 + 2m - 1), (3k + 2, 2k + 1)\}$

(۱) -۱ (۲) $-\sqrt{5}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{5}$

نکته : تابعی که در یک بازه ، هم صعودی و هم نزولی تعریف می شود ، تابع ثابت گفته می شود و ضابطه آن به صورت $y = f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ است .

نکته : اگر در یک تابع ، مولفه های اول آن با هم مساوی باشند ، آن گاه بایستی مولف های دوم آن نیز مساوی باشند .

$$f(x) = \cancel{m}x^2 - \cancel{n}x - k \longrightarrow f(x) = -k \xrightarrow{k=-1} f(x) = 1 \longrightarrow f(\sqrt{5}) = 1$$

$$\{(m, n-1), (0, k), (n-1, m^2 + 2m - 1), (3k + 2, 2k + 1)\}$$

$$\xrightarrow{m=0 \wedge n=0} \{(0, -1), (0, k), (-1, -1), (3k + 2, 2k + 1)\} \longrightarrow k = -1$$

$$\longrightarrow \{(0, -1), (0, -1), (-1, -1), (-1, -1)\} \longrightarrow \{(0, -1), (-1, -1)\}$$

۱۱۴ - نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها ، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می نامیم . سپس تابع $|g|$ را در

امتداد محور y ها ، 2 واحد در جهت منفی انتقال می دهیم ، طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{1}{|f|}$

برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است . اگر f تابع همانی باشد ، اختلاف مقادیر ، در تساوی $f(x+a) = 3$ کدام است ؟

(۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

نکته : تابع $y = f(x) = x$ را تابع همانی گفته می شود .

$$y = f(x) = x \longrightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \longrightarrow \frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{|x|} \quad (I)$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \longrightarrow g(x) = \frac{1}{x-a} \longrightarrow |g(x)| - 2 = \left| \frac{1}{x-a} \right| - 2 \quad (II)$$

$$(I), (II) \longrightarrow \frac{1}{|x|} = \left| \frac{1}{x-a} \right| - 2 \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left| \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-a} \right| - 2 \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 = \left| \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-a} \right|$$

$$\left| \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-a} \right| = 2 + \sqrt{2} \longrightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \longrightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right| = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - a = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \longrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \longrightarrow a = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} \longrightarrow a_1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - a = -\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \longrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \longrightarrow a = \frac{\cancel{\sqrt{2}} + 2 - \cancel{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2}{2} \longrightarrow a_2 = 1$$

$$f(x+a) = 3 \xrightarrow{f(x)=x} x+a=3 \longrightarrow x=3-a$$

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} - 1 \longrightarrow x_1 = 3 - \sqrt{2} + 1 = 4 - \sqrt{2} \\ a_2 = 1 \longrightarrow x_2 = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

$$|x_1 - x_2| = |4 - \sqrt{2} - 2| = |2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$$

۱۱۵ - ریشه های معادله $ax^2 - \lambda x + 4 = 0$ است. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله ای با ریشه های

$\alpha^2\beta$ و $\alpha\beta^2$ ، برابر باشند، مقدار $\log_{\sqrt{2}} a$ کدام است؟ ($a > 0$)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$ax^2 - \lambda x + 4 = 0 \longrightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} \end{cases}$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha^2\beta.\alpha\beta^2 \longrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 \xrightarrow{\div \alpha\beta} (\alpha + \beta) = (\alpha\beta)$$

$$\frac{\lambda}{a} = \left(\frac{4}{a}\right)^2 \longrightarrow \frac{\lambda}{a} = \frac{16}{a^2} \longrightarrow a = 2 \longrightarrow \log_{\sqrt{2}} a = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2 \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 2$$

۱۱۶ - معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

$$\sqrt{2x-3} = \sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2-x} \rightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \\ 2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D = \{2\}$$

$$x=2 \rightarrow \sqrt{4-3} = \sqrt{2} + \sqrt{2-2} - \sqrt{2-2} \rightarrow 1 \neq \sqrt{2} \rightarrow \text{له ریشه حقیقی ندارد}$$

۱۱۷ - اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ ، $x \geq 1$ باشد، حاصل $(g \circ g)(1)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۹

(۲) ۴

(۱) ۱

$$f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}, x \geq 1 \rightarrow y = (\sqrt{x} - 1)^2, x \geq 1 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = (\sqrt{y} - 1)^2, y \geq 1$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{y} - 1)^2}, y \geq 1 \rightarrow \sqrt{x} = |\sqrt{y} - 1|, y \geq 1 \rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - 1, y \geq 1$$

$$1 + \sqrt{x} = \sqrt{y}, y \geq 1 \rightarrow y = g(x) = (1 + \sqrt{x})^2, x \geq 1$$

$$(g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(4) = 9$$

۱۱۸ - دامنه $f(x) = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

$$\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x} \geq 0 \rightarrow \frac{x}{\log_{2^{-1}} x} \geq 0 \rightarrow \frac{x}{-\log_2 x} \geq 0 \xrightarrow{x > 0} -\log_2 x > 0 \rightarrow \log_2 x < 0$$

$$x < 2^0 = 1 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D = (0, 1)$$

۱۱۹- اگر $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (۳)$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (۲)$$

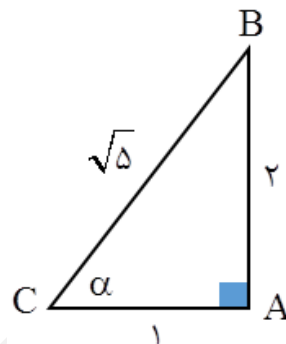
$$-\frac{\sqrt{5}}{10} \quad (۱)$$

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \xrightarrow{\div \cos \alpha} \tan \alpha = 2$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

۱۲۰- خط $2mx + (m^2 - 1)y = 3$ ، به ازای دو مقدار m با جهت مثبت محور X ها، زاویه 60° درجه می سازد.اختلاف مقادیر m ، کدام است؟

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad (۳)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$2mx + (m^2 - 1)y = 3 \rightarrow a = -\frac{2m}{m^2 - 1} \quad (I)$$

$$a = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad (II) \xrightarrow{(I), (II)} -\frac{2m}{m^2 - 1} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}m^2 + 2m - \sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = 4 + 12 = 16$$

$$m_1 = \frac{-1 + 4}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

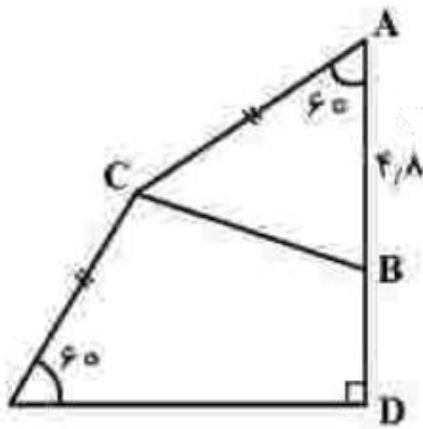
$$m_2 = \frac{-1 - 4}{2\sqrt{3}} = \frac{-5}{2\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow |m_1 - m_2| = \left| \frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{8}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$|m_1 - m_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

۱۲۱- در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ است. فاصله D از C، کدام است؟

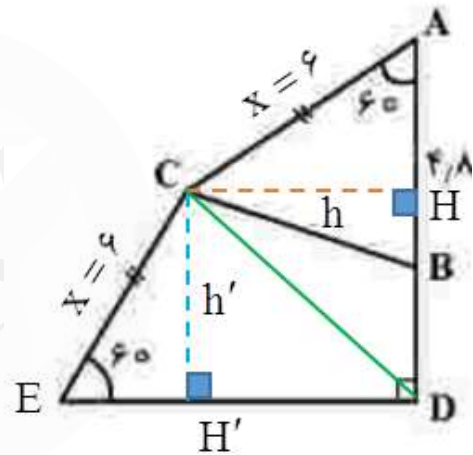


(۱) $6\sqrt{6}$

(۲) $3\sqrt{6}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{2}$



$$\Delta ABC : S = \frac{1}{2} \times AB \times h \longrightarrow \frac{7}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{8} \times h$$

$$h = 3\sqrt{3} \longrightarrow h' = 3\sqrt{3}$$

$$\Delta ABC : \sin 60^\circ = \frac{h}{x} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{x} \longrightarrow x = 6$$

$$CD^2 = (3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 \longrightarrow CD^2 = 54 \longrightarrow CD = \sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = 3\sqrt{6}$$

$$CD = a\sqrt{2} \longrightarrow CD = 3\sqrt{3} \times \sqrt{2} \longrightarrow CD = 3\sqrt{6}$$

۱۲۲- کمترین فاصله بین دو مقدار از جواب های معادله $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{3}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۲) π

(۱) 2π

روش اول:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \longrightarrow \cos^2 x = (1 + \sin x)^2 \longrightarrow -\sin^2 x = 1 + \sin^2 x + 2\sin x$$

$$2\sin^2 x + 2\sin x = 0 \longrightarrow \sin x(\sin x + 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \longrightarrow x = 0, \pi \\ \sin x = -1 \longrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

روش دوم:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = t \longrightarrow t = \frac{1}{t} \longrightarrow t^2 = 1 \longrightarrow t = \pm 1$$

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1 \longrightarrow \cos x = 1 + \sin x \longrightarrow \cos x - \sin x = 1 \longrightarrow x = 0$$

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = -1 \longrightarrow \cos x = -1 - \sin x \longrightarrow \cos x + \sin x = -1 \longrightarrow x = \pi$$

۱۲۳ - مقدار $\log_n m = a$ و مقدار $\log_{mn} m^2 n = b$ است. اگر $a > 0$ باشد، حاصل $[b]$ چقدر است؟

۴ (۴

۳ (۳

۲ (۲

۱ (۱

روش اول:

$$\log_{mn} m^2 n = b \xrightarrow{\text{تغییر مبنا}} \frac{\log_n m^2 n}{\log_n mn} = b \longrightarrow \frac{\log_n m^2 + \log_n n}{\log_n m + \log_n n} = b$$

$$\frac{2 \log_n m + 1}{\log_n m + 1} = b \xrightarrow{\log_n m = a} \frac{2a + 1}{a + 1} = b \longrightarrow b = 2 - \frac{1}{a + 1} \xrightarrow{0 < a < 1} [b] = [2^-] = 1$$

روش دوم:

$$\log_n m = a \longrightarrow m = n^a$$

$$\log_{mn} m^2 n = b \longrightarrow \log_{n^a \cdot n} n^{2a} \cdot n = b \longrightarrow \log_{n^{a+1}} n^{2a+1} = b \longrightarrow \frac{2a+1}{a+1} = b$$

$$b = 2 - \frac{1}{a+1} \xrightarrow{0 < a < 1} [b] = [2^-] = 1$$

۱۲۴ - کوچک ترین ضریب تغییرات دسته های سه تایی از اعداد زوج متوالی دو رقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟

$$\frac{1}{24\sqrt{6}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{12\sqrt{6}} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (۱)$$

چون کوچک ترین ضریب تغییرات را می خواهد پس بایستی بزرگ ترین اعداد زوج متوالی را انتخاب کنیم.

$$\frac{94}{2k-2}, \frac{96}{2k}, \frac{98}{2k+2} \longrightarrow \bar{x} = \frac{94+96+98}{3} = 96$$

$$\delta^2 = \frac{(94-96)^2 + (96-96)^2 + (98-96)^2}{3} = \frac{4+0+4}{3} = \frac{8}{3} \longrightarrow \delta = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$CV = \frac{\delta}{\bar{x}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{96} = \frac{2\sqrt{2}}{96\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{48\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{48\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{48\sqrt{6}} = \frac{1}{24\sqrt{6}}$$

بسمه تعالی

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

۱۲۵- اگر در ریشه ای از معادله $\Delta x^2 - ax + b = 0$ ، حد تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ موجود بوده و تابع f در آن

پیوسته نباشد، مقدار $\left[\frac{b - 2a}{3} \right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) -۲

(۱) -۳

$$f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{x=1} 1 + a + b = 0 \xrightarrow{} a + b = -1$$

$$\Delta x^2 - ax + b = 0 \xrightarrow{x=1} \Delta - a + b = 0 \xrightarrow{} a - b = \Delta$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = \Delta \end{cases} \xrightarrow{} 2a = \Delta - 1 \xrightarrow{} a = \frac{\Delta - 1}{2} \quad b = -3$$

$$\left[\frac{b - 2a}{3} \right] = \left[\frac{-3 - (\Delta - 1)}{3} \right] = \left[\frac{-\Delta - 2}{3} \right] = -3$$

۱۲۶ - تابع $f(x) = \begin{cases} \tan \frac{(2x+1)\pi}{4} & , x \leq 1 \\ \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} & , 1 < x < 5 \\ b(x - [-x]) & , x \geq 5 \end{cases}$ روی بازه $[1, 5]$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

○ / ۵ (۴

○ / ۷ (۳

- ○ / ۵ (۲

- ○ / ۷ (۱)

تابع $f(x)$ در نقطه $x=1$ پیوستگی راست و در نقطه $x=5$ پیوستگی چپ دارد.

$$(I) f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \longrightarrow -\frac{3}{a} = -1 \longrightarrow \boxed{a = 3}$$

$$f(1) = \tan \frac{3\pi}{4} = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|(x+2)(x-1)|}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{-a(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)}{-a} = -\frac{3}{a} \end{aligned}$$

$$(II) f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \longrightarrow 1 \circ b = -\frac{7}{3} \longrightarrow \boxed{b = -\frac{7}{3 \circ}}$$

$$f(5) = b(5 - [-5]) = b(5 + 5) = 1 \circ b$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 + x - 2|}{3(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|25 + 5 - 2|}{3(1-5)} = \frac{28}{-12} = -\frac{7}{3}$$

$$ab = 3 \times (-\frac{7}{3 \circ}) = -\frac{7}{1 \circ}$$

۱۲۷ - اگر $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{ax + b}{a \cos x - \sin x} = -\infty$ باشد ، کمترین مقدار صحیح b ، کدام است ؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{ax + b}{a \cos x - \sin x} = -\infty$$

$$a \cos x - \sin x = 0 \xrightarrow{\div \cos x} a = \tan x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{3}} a = \tan \frac{\pi}{3} \longrightarrow a = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sqrt{3}x + b}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} = -\infty$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = \cos x (\sqrt{3} - \tan x) \xrightarrow{(\frac{\pi}{3})^+} \cos x (\sqrt{3} - \sqrt{3}^+) = 0^-$$

$$\sqrt{3}x + b > 0 \longrightarrow \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} + b > 0 \longrightarrow b > -\sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\pi \approx 3} b > -1/7 \longrightarrow b = -1$$

بسمه تعالی

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

۱۲۸ - حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x}$ برابر $\sqrt{12}$ است. اگر $a > 0$ باشد،مقدار $[a]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ a-2x \geq 0 \longrightarrow x \leq \frac{a}{2} \end{cases} \quad \cap \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2}{2\sqrt{a-2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a-2x}} \xrightarrow{y'=0} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a-2x}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a-2x}} \longrightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{a-2x} \longrightarrow 4x = a-2x \longrightarrow x = \frac{a}{6}$$

$$x = 0 \longrightarrow y = f(0) = \sqrt{a}$$

$$x = \frac{a}{2} \longrightarrow y = f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a-2\left(\frac{a}{2}\right)} = \sqrt{\frac{a}{2}} \longrightarrow \min$$

$$x = \frac{a}{6} \longrightarrow y = f\left(\frac{a}{6}\right) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{a-2\left(\frac{a}{6}\right)} = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{4a}{6}} = \sqrt{\frac{a}{6}} + 2\sqrt{\frac{a}{6}} = 3\sqrt{\frac{a}{6}} \longrightarrow \max$$

$$\max \times \min = \sqrt{12} \longrightarrow 3\sqrt{\frac{a}{6}} \times \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{12} \longrightarrow 3\sqrt{\frac{a^2}{12}} = \sqrt{12} \longrightarrow \frac{3a}{\sqrt{12}} = \sqrt{12}$$

$$3a = 12 \longrightarrow a = 4$$

۱۲۹ - خط d در نقطه $(-1, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{1}{2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x} \cdot f(x)$ باشد مقدار $g'(-1)$ ، کدام است؟

$$\frac{13}{6} \quad (4)$$

$$\frac{7}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{(I)} & f(-1) = 5 \\ \text{(II)} & m = f'(-1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \cdot f(x) \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \times f(x) + f'(x) \times \sqrt[3]{x}$$

$$g'(-1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^2}} \times f(-1) + f'(-1) \times \sqrt[3]{-1} = \frac{1}{3} \times (5) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

۱۳۰ - سه عدد را به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد ۱ تا n انتخاب می کنیم. احتمال اینکه عدد سوم 10 باشد،

برابر $\frac{1}{15}$ است. در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان همین اعداد، با کدام احتمال فقط عدد سوم مضرب ۳ است؟

$$\frac{5}{51} \quad (4)$$

$$\frac{15}{91} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

توجه داشته باشیم که سه عدد انتخابی بدون جایگذاری، عدد اول و عدد دوم مضرب ۳ نیستند ولی عدد سوم مضرب ۳ می باشد.

$$A = \{10\} \longrightarrow P(A) = \frac{1}{15}$$

$$n(S) = 15 \longrightarrow S = \{1, 2, \boxed{3}, 4, 5, \boxed{6}, 7, 8, \boxed{9}, 10, 11, \boxed{12}, 13, 14, \boxed{15}\}$$

$$P(B) = \frac{\cancel{5}^5 \cancel{10}^3}{\cancel{15}^3 \cancel{15}^3} \times \frac{\cancel{9}^3 \cancel{14}^3}{\cancel{14}^3 \cancel{7}^3} \times \frac{\cancel{5}^3}{13} = \frac{15}{91}$$

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

۱۳۱ - احتمال اینکه یک کشتی گیر رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{1}{5}$ و احتمال کسب مدال طلا برای او $\frac{1}{3}$ بوده و در صورتی که

اصلی ترین رقیب خود را ببرد به $\frac{1}{2}$ افزایش خواهد یافت. با کدام احتمال، این کشتی گیر قهرمان می شود یا رقیب اصلی خود را می برد؟

$$\frac{7}{15} \quad (4)$$

$$\frac{13}{30} \quad (3)$$

$$\frac{11}{30} \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \quad (1)$$

$$P(A) = \frac{1}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(B|A) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cup B) = ?$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) \longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B) \longrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{6+10+3}{30} = \frac{13}{30}$$

۱۳۲ - سه ظرف یکسان داریم که هر کدام به ترتیب حاوی ۱۶، ۱۵ و ۱۴ مهره هستند. تعداد مهره های قرمز سه ظرف،

به ترتیب ۴، ۶ و ۵ مهره است. احتمال انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره های آن ظرف است. یکی از

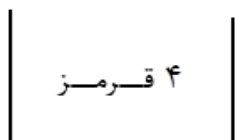
ظرف ها را انتخاب کرده و مهره ای بیرون می کشیم، با کدام احتمال، مهره انتخابی، قرمز است؟

$$\frac{17}{120} \quad (4)$$

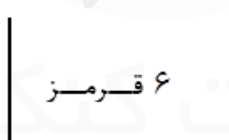
$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$\frac{131}{560} \quad (2)$$

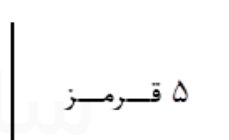
$$\frac{1}{3} \quad (1)$$



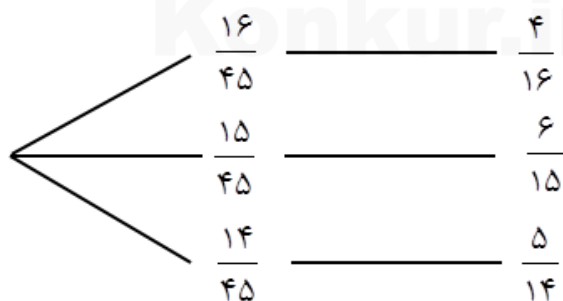
$$n_1 = 16$$



$$n_2 = 15$$



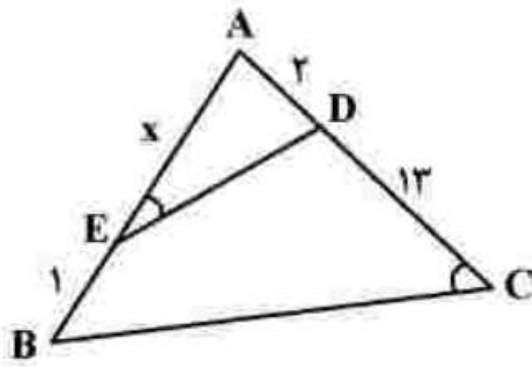
$$n_3 = 14$$



$$P = \left(\frac{16}{45} \times \frac{4}{16} \right) + \left(\frac{15}{45} \times \frac{6}{15} \right) + \left(\frac{14}{45} \times \frac{5}{14} \right) = \frac{4}{45} + \frac{6}{45} + \frac{5}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

بسمه تعالی

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

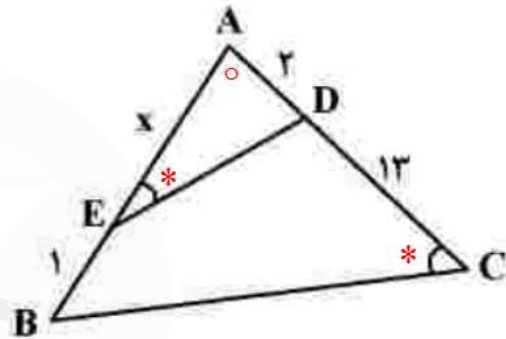
۱۳۳ - در شکل زیر، $\hat{AED} = \hat{ACB}$ است. مقدار x کدام است؟

(۱) ۷

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{E} = \hat{C} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ADE \approx \triangle ABC$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{x}{15}$$

$$x^2 + x - 30 = 0 \rightarrow (x+6)(x-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -6 & \text{ق} \\ x = 5 & \text{ق} \end{cases}$$

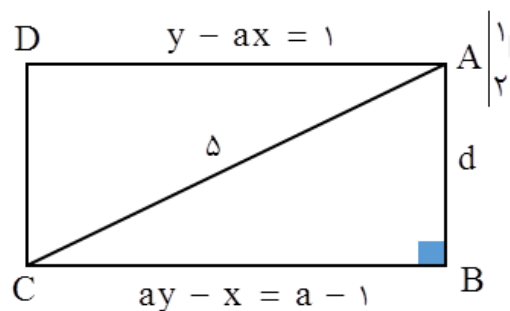
۱۳۴ - دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y - ax = 1$ و $ay - x = a - 1$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر و نقطه $(1, 2)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

$$2\sqrt{34} \quad (4)$$

$$\sqrt{46} \quad (3)$$

$$3/5 \quad (2)$$

$$2/5 \quad (1)$$



$$\begin{cases} y - ax = 1 \longrightarrow m = -\frac{-a}{1} = a \\ ay - x = a - 1 \longrightarrow m' = -\frac{-1}{a} = \frac{1}{a} \end{cases} \xrightarrow{\parallel} a = \frac{1}{a} \longrightarrow a^2 = 1 \longrightarrow a = \pm 1$$

$$\text{if } a = 1 \longrightarrow \begin{cases} y - x = 1 \longrightarrow A(1, 2) \\ y - x = 0 \end{cases}$$

$$\text{if } a = -1 \longrightarrow \begin{cases} y + x = 1 \\ y - x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \longrightarrow d = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 + \frac{1}{2} = \Delta^2 \longrightarrow x^2 + \frac{1}{2} = 25 \longrightarrow x^2 = 25 - \frac{1}{2} \longrightarrow x^2 = \frac{49}{2} \longrightarrow x = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3.5$$

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

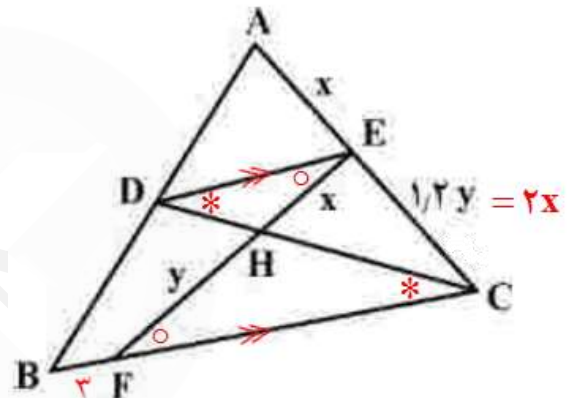
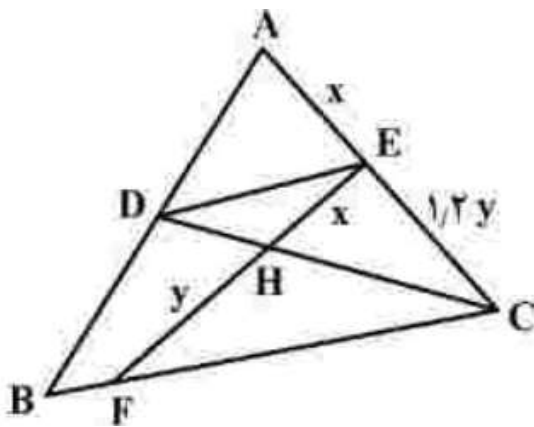
۱۳۵ - در شکل زیر، $DE \parallel BC$ و $3y = 5x$ است. اگر $BF = 3$ باشد، اندازه BC کدام است؟

(۱) ۶/۷۵

(۲) ۶/۲۵

(۳) ۵/۷۵

(۴) ۵/۲۵



$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{نسبت مساوی}} \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \xrightarrow{\frac{x}{3x}} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \boxed{BC = 3DE} \quad (I)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{C} \\ \hat{E} = \hat{F} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle DHE \approx \triangle CHF \rightarrow \frac{EH}{FH} = \frac{DH}{CH} = \frac{DE}{CF} \xrightarrow{\frac{x}{\frac{5}{3}x}} = \frac{DE}{CF}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{DE}{CF} \rightarrow \boxed{CF = \frac{5}{3}DE} \quad (II)$$

$$BC = BF + CF \rightarrow 3DE = 3 + \frac{5}{3}DE \rightarrow 3DE - \frac{5}{3}DE = 3 \rightarrow DE = \frac{9}{4}$$

$$(I) \rightarrow BC = 3DE \rightarrow BC = 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$$

بسمه تعالی

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

۱۳۶ - طول وتری از دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1$ که روی خط $2y + x = a$ قرار دارد، برابر ۳ است.اختلاف مقادیر a چقدر است؟

$$5\sqrt{3} \quad (4)$$

$$3\sqrt{6} \quad (3)$$

$$\sqrt{38} \quad (2)$$

$$\sqrt{35} \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$$

$$O \begin{cases} -\frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{24} = \sqrt{6}$$

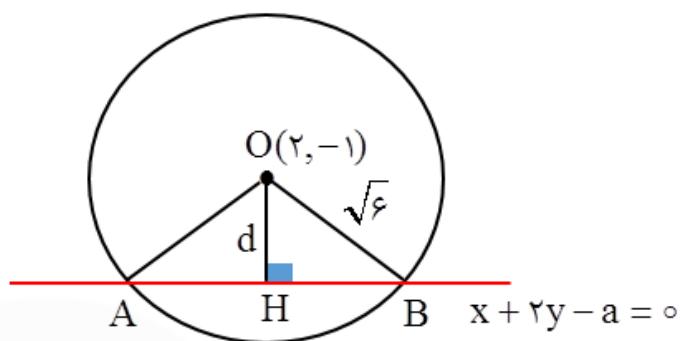
$$x + 2y - a = 0 \quad O(2, -1)$$

$$d = \frac{|2 - 2 - a|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{a}{\sqrt{5}} \rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$AB = 3 \rightarrow AH = BH = \frac{3}{2}$$

$$d^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{6})^2 \rightarrow \frac{a^2}{5} = 6 - \frac{9}{4} \rightarrow \frac{a^2}{5} = \frac{15}{4} \rightarrow 4a^2 = 75$$

$$a^2 = \frac{75}{4} \rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{75}}{2} = \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \rightarrow \left| \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

۱۳۷ - ریشه هفتم عدد مثبت a ، مساوی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{15}{7}$ است. $\left(\frac{1}{a} - 3\right)$ چند برابر $(1 + \sqrt{3})$ است؟

$$6 + 3\sqrt{3} \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$6 - 3\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\sqrt[7]{a} = 27 \times a^{\frac{15}{7}} \rightarrow \sqrt[7]{a} = 27 \times \sqrt[7]{a^{15}} \xrightarrow{\wedge^7} a = 27^7 \times a^{15} \xrightarrow{\div a} 1 = 27^7 \times a^{14}$$

$$a^{14} = \frac{1}{27^7} \rightarrow \sqrt[7]{a^{14}} = \sqrt[7]{\frac{1}{27^7}} \rightarrow a^2 = \frac{1}{27} \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{27}} \rightarrow \frac{1}{a} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a} - 3 = 3\sqrt{3} - 3 = -3(1 - \sqrt{3})$$

$$\frac{-3(1 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{(1 - \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})} = \frac{-3(1 + 3 - 2\sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{-3(4 - 2\sqrt{3})}{-2} = \frac{-3(\cancel{2})(2 - \sqrt{3})}{-\cancel{2}} = 6 - 3\sqrt{3}$$

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

۱۳۸ - در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برزنج برداشت می کنند.)

۲۷۰ (۴)

۲۳۵ (۳)

۱۳۵ (۲)

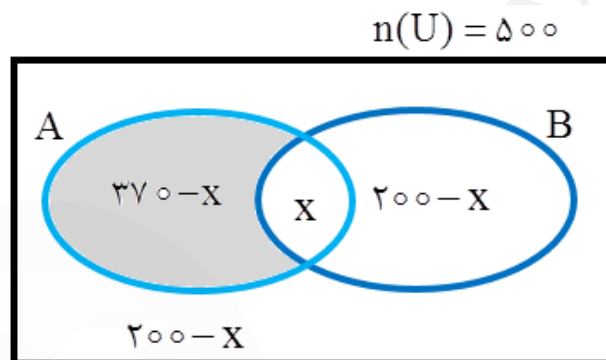
۱۰۰ (۱)

روش اول:

$$370 - \cancel{x} + \cancel{x} + 200 - x + 200 - x = 500$$

$$2x = 770 - 500 \longrightarrow 2x = 270 \longrightarrow x = 135$$

$$370 - x = 370 - 135 = 235$$



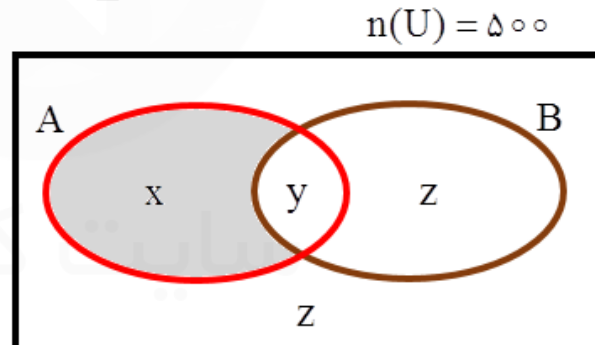
روش دوم:

$$x + y = 370 \longrightarrow x = 370 - 135 = 235$$

$$y + z = 200 \longrightarrow y = 200 - 65 = 135$$

$$x + y + 2z = 500 \longrightarrow 370 + 2z = 500$$

$$2z = 130 \longrightarrow z = 65$$



بسمه تعالی

سوالات و پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور دی ماه ۱۴۰۱

۱۳۹ - جمله های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی باشد، جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدر نسبت دنباله حسابی است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

 $\frac{8}{5}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۱)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$t_n = rn + b$$

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_8 = a_1 + 7d \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_4 = 4r + b \\ t_8 = 8r + b \end{cases}$$

$$t_{10} = 0$$

$$\begin{cases} a_4 = t_4 \\ a_8 = t_8 \end{cases} \longrightarrow a_8 - a_4 = t_8 - t_4 \longrightarrow 4d = 4r \longrightarrow r = d$$

$$\frac{t_{10}}{d} = \frac{t_{10} + 5r}{d} = \frac{5 \times d}{d} = 5$$

۱۴۰ - بزرگ ترین عضو مجموعه $A = \left\{ m^3 + n^2 \mid m, n \in \mathbb{N}, 8^{-\frac{2}{3}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{2}{3}n} > \frac{1}{128} \right\}$ کدام است؟

۲ (۴)

۵ (۳)

۹ (۲)

۱۲ (۱)

$$8^{-\frac{2}{3}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{2}{3}n} > \frac{1}{128} \longrightarrow (2^3)^{-\frac{2}{3}m} \times (2^2)^{-n} + (2^2)^{-m} \times (2^3)^{-\frac{2}{3}n} > \frac{1}{2^7}$$

$$(2)^{-2m} \times (2)^{-2n} + (2)^{-2m} \times (2)^{-2n} > 2^{-7} \longrightarrow 2^{-2m-2n} + 2^{-2m-2n} > 2^{-7}$$

$$2 \times 2^{-2m-2n} > 2^{-7} \xrightarrow{\div 2} 2^{-2m-2n} > 2^{-8} \longrightarrow -2m-2n > -8 \xrightarrow{\div (-2)} m+n < 4$$

$$m=2, n=1 \longrightarrow m^3 + n^2 = 8 + 1 = 9$$

(سید علی موسوی ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴)

دبیر آموزش و پرورش ناحیه ۴ مشهد مقدس